Шмидт А. А.
(Липецкий государственный технический университет, г. Липецк)

ПРИНЦИП УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИИ В ОБЪЕМНОЙ ЛИСТОВОЙ ШТАМПОВКЕ

Для выполнения современных требований, предъявляемых к качеству изделий, получаемых объемной листовой штамповкой необходимы новые подходы и методы интенсификации и оптимизации процессов. Одним из возможных путей является математическое моделирование таких процессов и оптимизация технологии. Выявленные критерии в рамках наиболее широко известного инженерного метода [1], энергетического метода [2], вариационных методов и др., не позволяют на их основе построить строгую систему нахождения оптимального решения задачи. Как отмечают сами исследователи [3] «Основным недостатком известных моделей предельного деформирования является то, что они как правило не связаны с конкретным процессом штамповки, то есть они не учитывают многообразия реальных факторов, действующих на заготовки при деформировании».

Рассматриваемая в работе задача решается с точки зрения оптимальности, то есть нахождения таких технологических параметров процесса, при которых ключевые характеристики будут иметь наилучшие значения. Таким образом, можно говорить о нахождении некоторого функционала с заданными характеристиками. Математическое моделирование осуществляется с использованием дискретного метода конечных элементов [4].

При анализе технологии объемной листовой штамповки были выявлены характеристические параметры и сведены в функционал вида

$$\Omega = f\left(u_n, P, D, \Psi, r, R\right) \qquad (1)$$

где u_n - n-е приближение (n – число узлов МКЭ) точного решения;

P – усилие вытяжки;

D – диаметр исходной заготовки;

Ψ – удельное отклонение толщины элементов;

r – радиус скругления пуансона;

R – радиус скругления матрицы.

Рассмотрим функционал с точки зрения оптимальности. Входящие в него параметры имеют индивидуальные характеристические кривые и имеют смысл при определенных технологических условиях. Воспользуемся известными принципами условной многомерной оптимизации [5-7] и построим методику оптимизации.

Задача многомерной оптимизации есть типовая задача нелинейного программирования. Под таковой задачей будем понимать задачу о максимуме/минимуме функций $f_i(x)$ при наложенных на вектор x условиях в форме равенств и неравенств:

$$f_i(x) \to \max/\min \left| \begin{array}{l} x \in V_x \\ f_i(x) = 0, i = 1,2,\dots,m, \\ \varphi_\upsilon(x) \ge 0, \nu = 1,2,\dots . \end{array} \right. \qquad (2)$$

Множество векторов x, удовлетворяющих всем условиям задачи, образует множество допустимых решений D, принадлежащее n-мерному векторному пространству R^n. При этом множество Vx определяется ограничениями, наложенными на каждую из составляющих вектора x, типа

$$a_k \le x_k \le b_k$$

т.е. представляет собой параллелепипед в пространстве Rn. исло условий в форме равенства меньше n. В противном случае решениями являются корни системы $f_i(x) = 0$ (i = 1, 2, … , m) или множество допустимых решений пусто. Функции f_0, f_i, $\varphi\nu$, если это специально не оговорено, предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми.

Заметим, что условия в форме неравенств всегда можно свести к условиям в форме равенств, введя добавочные переменные. Например,

$$\varphi_\nu(x) \ge 0 \to \varphi_\nu(x) - z_\nu^2 = f_{m+\nu}(x, z_\nu) = 0$$

Рассматриваемая задача должная содержать выпуклые функции f_i и их решения также должны быть выпуклыми, как минимум, в окрестностях искомого решения, что может быть достигнуто, в случае необходимости, наложением дополнительных условий. Вследствие этого, множество D представляет собой пересечение выпуклых множеств. Так как Vx – выпукло, то достаточным для выпуклости D является выпуклость функций $\varphi_\nu(x)$. Выпуклость позволяет получать локально неулучшаемое решение x^0, то есть такой элемент множества допустимых решений D, в сколь угодно малой окрестности которого $L(x^0)$, принадлежащий D, не найдется другого «лучшего» элемента. Формально

$$f_i\left(x^0\right) \geq f_i(x) \quad \forall x \in L\left(x^0\right)$$

Это позволяет быстро находить решения при дискретном представлении анализируемых величин. Таким образом, любая сколь угодно малая по величине допустимая (не выводящая за пределы D) вариация δx не приведет в точку лучшую, чем x^0. В выпуклой задаче функция f_i и множество D, на котором она определена, выпуклы, значит подграфик П является выпуклым множеством, а f_i – его верхней/нижней границей.

Выведем необходимое условие оптимальности задачи. Воспользуемся для этого функцией Лагранжа.

Пусть x* - элемент множества допустимых решений D такой, что величина $f_i(x^*)$ не меньше, чем величина fi для любого другого элемента D, то есть x* - решение или одно из решений задачи. Выясним, каким условиям кроме неравенства

$$f_i\left(x^*\right) \geq f_0(x) \quad \forall x \in D \qquad (3)$$

должно это решение удовлетворять. Потребность в таких условиях связана с тем, что приведенное неравенство не конструктивно, то есть не дает никакого пути для определения x*, кроме полного перебора.

Общая логика получения необходимых условий заключается в том, что из множества D выделяется подмножество сравнения L, включающее x*. Это подмножество должно быть, с одной стороны, таким, чтобы на нём условия оптимальности имели более конструктивный вид, чем (3), а с другой стороны, оно должно выделять не слишком много «претендентов» на оптимальное решение.

Для того, чтобы x* было решением задачи о максимуме $f_i(x)$ на D, необходимо, чтобы x* доставляло максимум $f_i(x)$ на L. Так что условия оптимальности на L – необходимые условия оптимальности для решаемой задачи нелинейного программирования. Будем рассматривать в качестве L множество элементов *D*, отличающихся от x* на сколь угодно малый по модулю вектор δx (вариацию x*)*, так чт

1. $x^* + \delta x \in D \qquad \forall \delta x \in \ell;$

2. $|\delta x| \leq \varepsilon$

Множество вариаций *l* образуется из L вычитанием x* из всех его элементов. Предположим, что определяющие условия задачи функции f_i непрерывно дифференцируемы в x*, условия в форме неравенств в задаче (2) отсутствуют и точка x* лежит строго внутри V_x. Заменим, пользуясь малостью δx*i*, функции f_i линейной частью их разложения в ряд Тейлора:

$$f_0(x) = f_0(x^*) + (\nabla f_0(x^*), \delta x);$$
$$f_i(x) = f_i(x^*) + (\nabla f_i(x^*), \delta x); \qquad (4)$$
$$i = 1,2,\ \ldots,\ m.$$

Условия принадлежности x к множеству L можно записать как

$$f_i(x) = f_i(x^*) = 0$$

или из (4)

$$(\nabla f_i(x^*), \delta x) = 0 \quad \forall \delta x \in \ell, \quad i = 1,2,\ \ldots,\ m. \qquad (5)$$

Условия оптимальности на L

$$f_0(x^*) \geq f_0(x) \quad \forall x \in L \qquad (6)$$

или

$$(f_0(x^*), \delta x) \leq 0 \quad \forall \delta x \in \ell. \qquad (7)$$

Так как точка x* лежит строго внутри множества L, то вектор δx лежит в плоскостях, выделяемых условиями (5), и может иметь любой знак. А это значит, что неравенство в (7) можно заменить равенством. Действительно, если бы нашелся такой вектор δx^1, для которого это неравенство было бы строгим (<0), то вектор $\delta x^2 = \delta x^1$ тоже удовлетворял бы (5), однако для него неравенство (7) уже не выполнялось бы, так как его левая часть окажется > 0. Так что мы пришли к противоречию и доказали, что неравенство (7) может быть записано как

$$(\nabla f_0(x^*), \delta x) = 0 \quad \forall \delta x \in \ell \qquad (8)$$

Выясним расположение векторов ∇f_0 и $\nabla f_i(i = 1,2,\ \ldots,\ m)$ в точке x*. В соответствии с (8) $\nabla f_0(x^*)$ нормален к любым допустимым векторам δx. Если m=1, то множество допустимых δx представляет собой плоскость. Градиент f_i, как и градиент f_0, нормален к этой плоскости. Следовательно, оба эти вектора лежат на одной прямой, т.е. найдется такой скаляр λ, что

$$\nabla f_0(x^*) + \lambda \nabla f_1(x^*) = 0. \qquad (9)$$

Если m = 2, а размерность x равна, например, трем, то множество *l*, - прямая, полученная пересечением двух плоскостей. Градиенты f_i, а также градиент f_0 нормальны к ней, Следовательно, они лежат в одной плоскости и найдутся такие λ_i, что

$$\nabla f_0(x^*) + \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0 \qquad (10)$$

В общем случае m связей равенства (5) и (8) означают, что в точке x* градиенты целевой функции и функций f_i, линейно зависимы, т. е. найдется такой вектор λ с составляющими λ_i, что

$$\nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0. \qquad (11)$$

Мы получили условия оптимальности для задачи НП в гораздо более удобной, чем (3), форме. Совместное решение (11) и системы уравнений связи

$$f_i(x^*) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (12)$$

позоляет найти векторы x* и λ. (Число уравнений в точности равно числу неизвестных.)

Эти уравнения линейны относительно λ, но нелинейны по x. Поэтому они могут иметь не единственное решение. Каждое из таких решений удовлетворяет необходимым условиям оптимальности, а одно из них является решением задачи.

Условиям (11) можно придать более удобную форму, введя функцию

$$R = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \qquad (13)$$

Тогда, если x* - решение задачи, то оно удовлетворяет уравнениям связей и условию

$$\nabla R(x^*) = 0 \qquad (14)$$

т.е. функция R в этой точке стационарна.

Функцию R называют функцией Лагранжа задачи нелинейного программирования.

Рассмотрим оптимизационный функционал (1) для решаемой задачи листовой штамповки. Очевидно, что входящие в функционал операнды для сохранения физического смысла должны быть положительны на всем множестве возможных решений, включая и оптимальное. Пояснение может требовать лишь параметр u_n, который определяется сходимостью решения, полученного с помощью МКЭ, но и он должен быть положителен и меньше определенного числа.

Для каждого параметра может быть построена аналитическая функция, возможно, с применением методов приближения функций, которые подробно рассмотрены, в частности в [8]. Например, для усилия может быть использована кривая зависимости «перемещение-напряжение». Для других параметров могут быть построены кусочно-линейные функции и сглажены перечисленными выше методами. Далее, каждый параметр принимается в качестве функции f_i для построения оптимизационной функции Лагранжа для решаемой задачи.

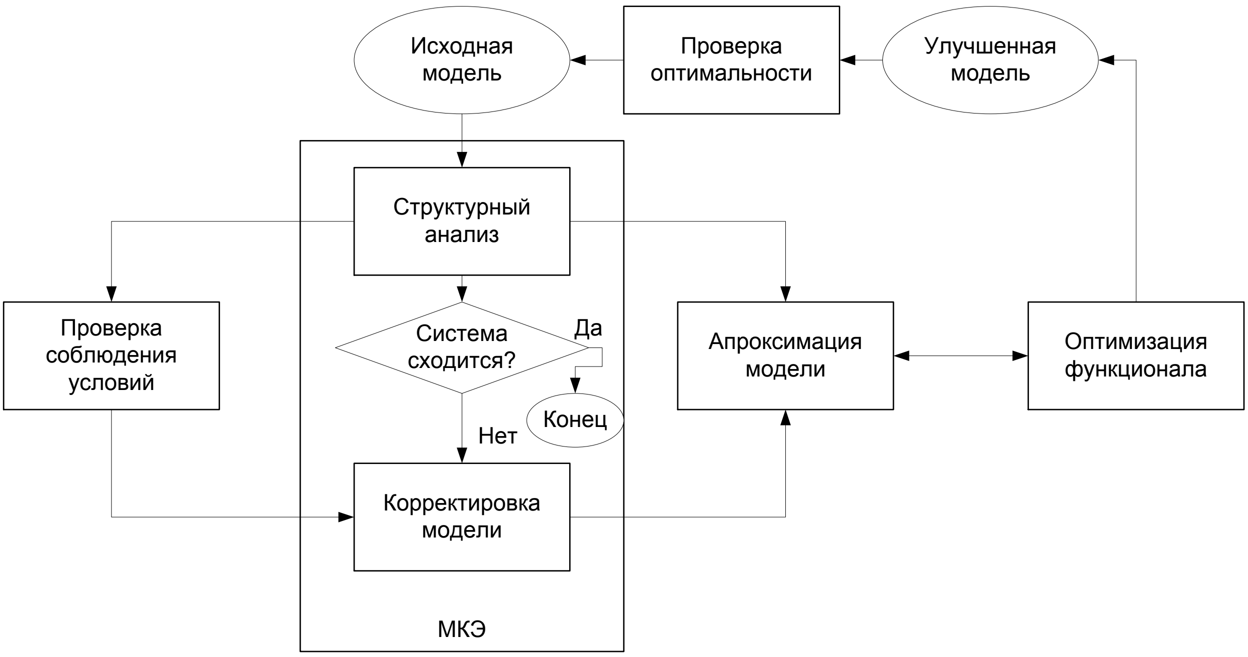

Рис. 1 Структурная схема процесса оптимизации технологии

В качестве условных неравенств ограничения выступают естественные ограничения. Например, усилие вытяжки не может превышать значение σ_T, и не может быть отрицательным. Аналогичным образом построим естественные неравенства для других параметров функционала:

$$\begin{aligned} &0 \le P \le \sigma_T * F\text{ïð} ; \\ &0 \le D \le \text{ìáð} ; \\ &0 \le \Psi \le \Delta; \\ &0 \le r + R \le d_{\text{ï}} \end{aligned} \qquad (15)$$

где Fпр – площадь проёма матрицы; lобр – длина максимальной образующей; $d_п$ – диаметр пуансона.

Рассмотрим полученную выше функцию Лагранжа (13) в развернутом виде для задачи оптимизации технологии вытяжки листового металла (рис. 1). Для выбранных характеристических параметров и наложенных на них ограничивающих условий в виде неравенств (15) решим задачу поиска оптимального решения.

Задана некоторая дискретная модель исходной заготовки. Задача математического моделирования технологии решается с помощью метода конечных элементов, которая состоит из структурного построения процесса пластического деформирования заготовки, определения условий контакта и др. Выполним моделирование процесса вытяжки в определенное число шагов n. На основе математической модели решаем задачу поиска неизвестных в построенной системе уравнений, после чего определяет необходимость дальнейшего моделирования или завершения процесса. В случае продолжения выполняем корректировку модели и перемещение конечных элементов на шаг итерации.

На каждом шаге моделирования вычисляем m значений характеристических параметров исследуемого оптимизационного функционала. Рассчитаем значение функции R по формуле (13). С помощью известных математических принципов найдем значение градиента $\nabla R(x)$. Решение уравнения (14) будет являться локально неулучшаемым решением задачи x^0, то есть будет иметь место равенство

$$\nabla R\left(x^0\right) = 0 \tag{16}$$

После выполнения следующей итерации может быть определено другое локально неулучшаемое решение задачи $x^{0'}$:

$$\nabla R\left(x^{0'}\right) = 0 \tag{17}$$

Вычитая (17) из (16) получим:

$$\Gamma = \nabla R\left(x^{0'}\right) - \nabla R\left(x^0\right)$$

Очевидно, что чем меньше значение Г, тем точнее мы приблизились к действительно точному оптимальному решению. Вследствие дискретности исходных данных в модели вероятность сойтись в точке точного решения мала и процедура поиска должна быть прекращена после некоторого числа итераций. Такое число задается в методике в виде константы. По достижении заданной точности исходная модель будет являться оптимальной моделью и процесс будет завершен.

Описан принцип условной оптимизации технологии в объемной листовой штамповки, строго, с математической точки зрения, позволяет строить на его основе методы оптимизации технологии. Эти методы могут быть реализованы практически в системах компьютерного моделирования и проектирования процессов в данной области пластического формоизменения и достигать высокого качества изделий, повышать коэффициент использования металла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1977. 423 с.
2. Овчинников А.Г. Основы теории штамповки выдавливанием на прессах. М.: Машиностроение, 1983, 200 с.
3. Чумадин А. С. Разработка ресурсосберегающих технологий листовой штамповки методами математического и физического моделирования формообразующих операций. Дис. д-ра техн.наук 05.16.05 М.1997 419с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.
5. Софиева Ю.Н., Цирлин А.М. Условная оптимизация. – М.: Едиториал УРСС, 2003. 144 с.
6. Ковалев М.М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование). 2-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 192 с.
7. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М. Факториал-пресс. 2002 824с.
8. Богачев К.Ю. Методы приближения функций. М.: МГУ. 1998.